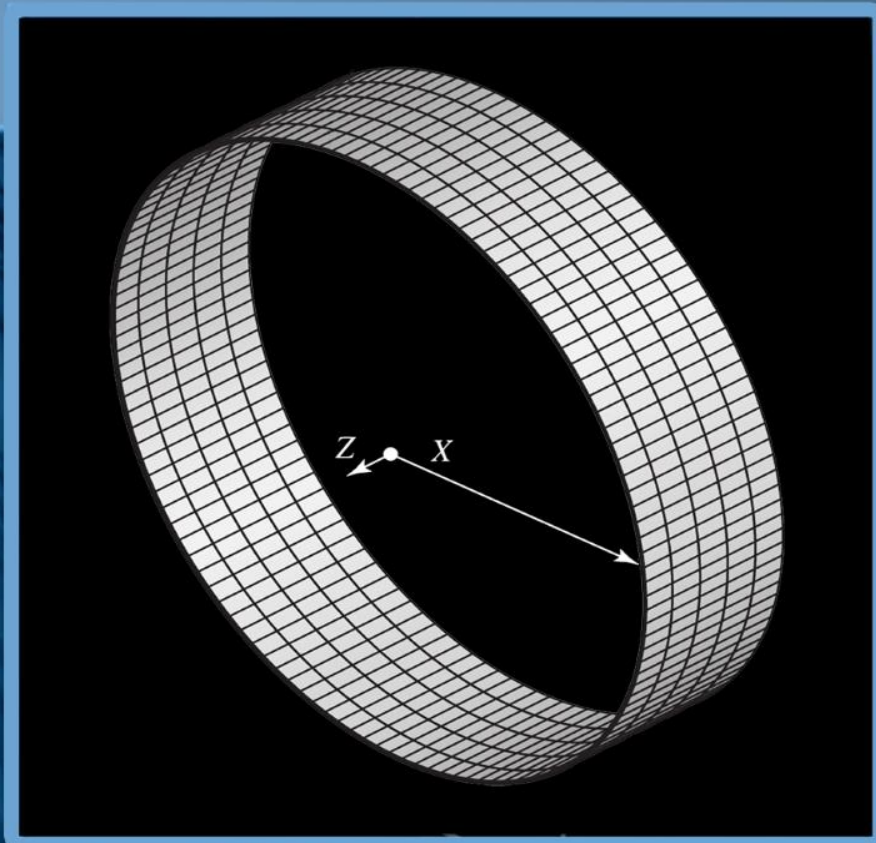


فصل نهم

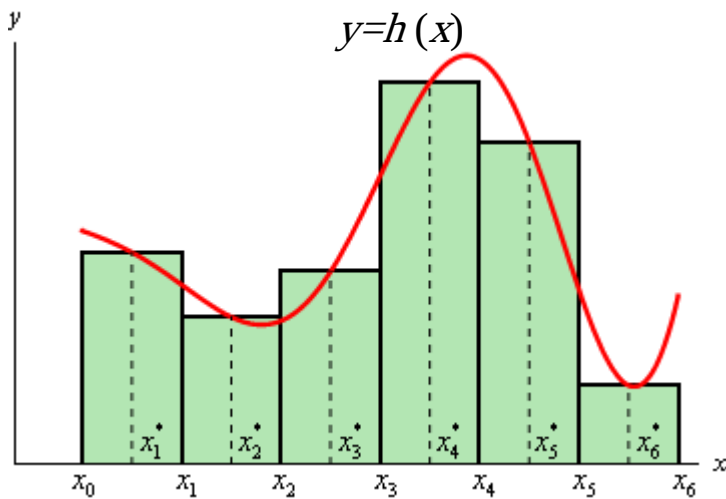
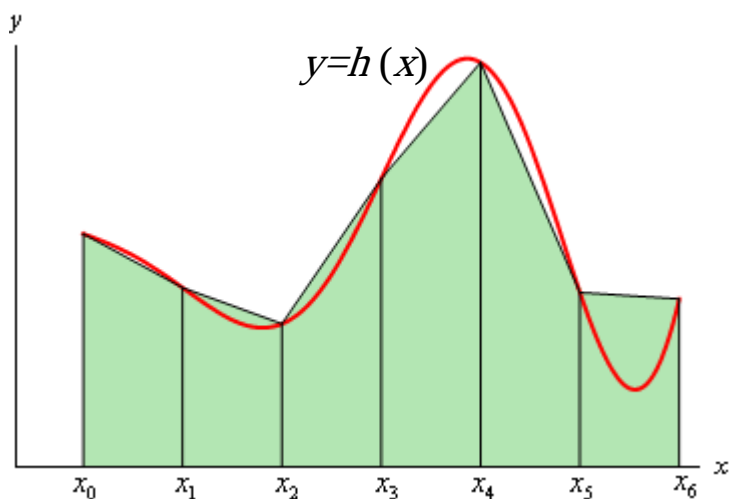


انتگرال گیری عددی

مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران
مرجع اصلی:

ایده انتگرال گیری عددی

$$I = \int_{x_i}^{x_j} h(x) dx$$

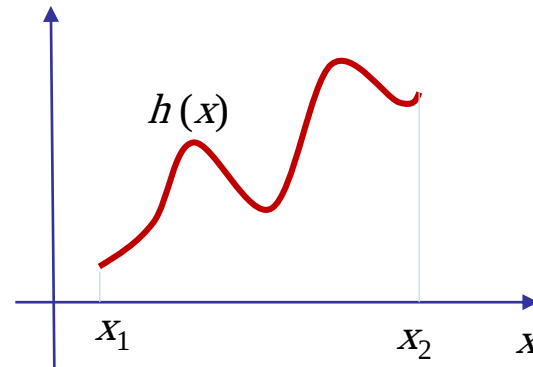


The World of Izzy Pop

ایده های انتگرال گیری عددی: قاعده ذوزنقه ای، قاعده سیمپسون، مربع سازی گوس و ...

نماد سازی

$$I = \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx$$

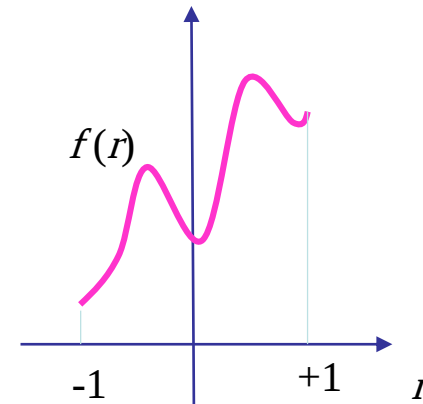


با تغییر متغیر از X به r ، ضرایب a و b به نحوی تعیین می گردند که حدود انتگرال -1 و $+1$ شوند.

$$r = ax + b \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} h(x) \rightarrow g(r) \\ dx \rightarrow \frac{dr}{a} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad I = \int_{-1}^1 \frac{1}{a} g(r) dr = \int_{-1}^1 f(r) dr$$

$$\left. \begin{matrix} -1 = ax_1 + b \\ +1 = ax_2 + b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a, b$$

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr$$

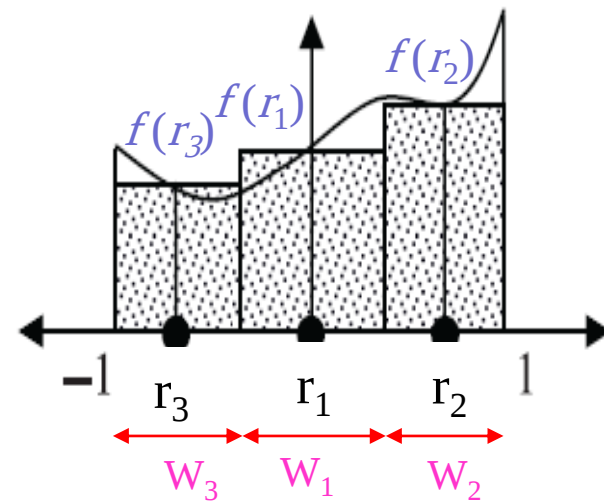
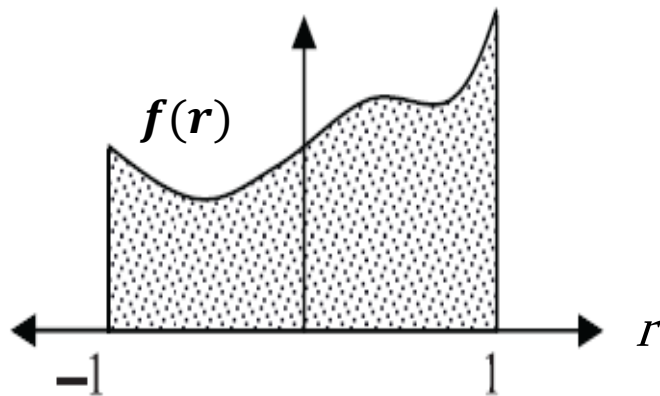


مربع سازی کوس

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr$$

$$I \approx \sum_{i=1}^m W_i f(r_i)$$

که W_i ضرایب وزن گوس و r_i نقاط نمونه یا نقاط گوس نامیده می شوند.



مربع سازی گوس

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr$$

محاسبه انتگرال چند جمله ای مرتبه n در حالت نرمال:

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \dots + a_n r^n$$

حل تحلیلی و دقیق این انتگرال موجود است. به دلیل تقارن حدود انتگرال، حاصل انتگرال همه جملات با توان فرد صفر می شود و لذا:

$$I = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \dots + \frac{2}{n+1}a_n$$

اما اگر به روش مربع سازی گوس انتگرال این چند جمله ای محاسبه شود، می توان اثبات کرد با انتخاب m نقطه گوس و m ضریب وزن، انتگرال چند جمله ای تا مرتبه $2m-1$ را می توان به طور دقیق محاسبه نمود.

مربع سازی گوس

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \dots + a_n r^n$$

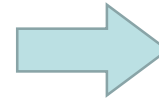
مقدار انتگرال چند جمله ای فوق، به روش مربع سازی گوس برابر است با:

$$\begin{aligned}
 I \approx \sum_{i=1}^m W_i f(r_i) &= W_1(a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + a_3 r_1^3 + \dots + a_n r_1^n) \\
 &+ W_2(a_0 + a_1 r_2 + a_2 r_2^2 + a_3 r_2^3 + \dots + a_n r_2^n) \\
 &+ W_3(a_0 + a_1 r_3 + a_2 r_3^2 + a_3 r_3^3 + \dots + a_n r_3^n) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &+ W_m(a_0 + a_1 r_m + a_2 r_m^2 + a_3 r_m^3 + \dots + a_n r_m^n)
 \end{aligned}$$

مربع سازی کوس

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \cdots + \frac{2}{n+1}a_n$$

برای تساوی حل عددی با حل تحلیلی



$$\begin{aligned} I \approx \sum_{i=1}^m W_i f(r_i) &= W_1(a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + a_3 r_1^3 + \cdots + a_n r_1^n) \\ &+ W_2(a_0 + a_1 r_2 + a_2 r_2^2 + a_3 r_2^3 + \cdots + a_n r_2^n) \\ &+ W_3(a_0 + a_1 r_3 + a_2 r_3^2 + a_3 r_3^3 + \cdots + a_n r_3^n) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &+ W_m(a_0 + a_1 r_m + a_2 r_m^2 + a_3 r_m^3 + \cdots + a_n r_m^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m W_i &= 2 \\ \sum_{i=1}^m W_i r_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^m W_i r_i^2 &= \frac{2}{3} \\ \sum_{i=1}^m W_i r_i^3 &= 0 \\ \sum_{i=1}^m W_i r_i^4 &= \frac{2}{5} \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^m W_i r_i^{n-1} &= 0 \\ \sum_{i=1}^m W_i r_i^n &= \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

مجهولات شامل ضرایب وزن W_i ، مقادیر نقاط گوس r_i و نیز تعداد نقاط گوس m می باشند.

$n+1$ معادله و $2m+1$ مجهول

مربع سازی گوس

$$(۱) \quad \sum_{i=1}^m W_i = 2$$

به عنوان مثال اگر یک چند جمله ای خطی ($n=1$) داشته باشیم، تنها دو معادله نخست وجود دارند، یعنی:

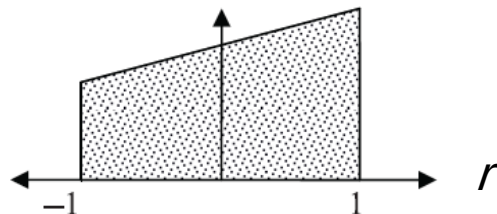
$$(۲) \quad \sum_{i=1}^m W_i r_i = 0$$

$$W_1 = 2$$

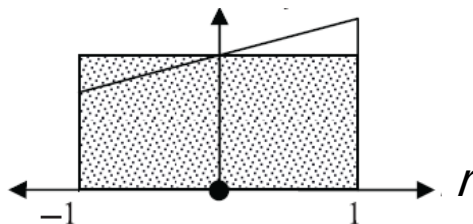
تنها با انتخاب یک نقطه گوس، از معادله اول داریم:

$$r_1 = 0$$

و با داشتن W_1 ، معادله دوم نتیجه می شود:



$$f(r) = a_0 + a_1 r$$



$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2 \times f(0)$$

و لذا با یک تنها نقطه گوس، دو معادله فوق، دقیقاً ارضا می شوند.

مربع سازی کوس

$$(۱) \sum_{i=1}^m W_i = 2$$

$$(۲) \sum_{i=1}^m W_i r_i = 0$$

$$(۳) \sum_{i=1}^m W_i r_i^2 = \frac{2}{3}$$

$$(۴) \sum_{i=1}^m W_i r_i^3 = 0$$

اکنون یک چند جمله‌ای درجه سوم ($n=3$) بررسی می شود.
در این حالت چهار معادله داریم:

$$W_1 + W_2 = 2$$

$$W_1 r_1 + W_2 r_2 = 0$$

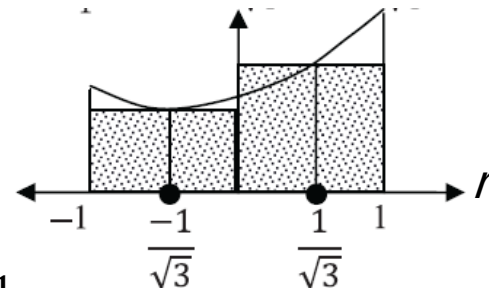
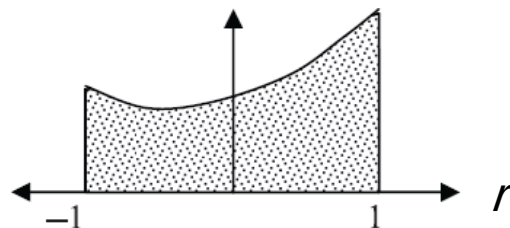
$$W_1 r_1^2 + W_2 r_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$W_1 r_1^3 + W_2 r_2^3 = 0$$

با فرض $m=2$ ، این معادلات،
بدین صورت می باشند:

$$r_1^2 + r_2^2 = 2r_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

با فرض تقارن نسبت به محور قائم $r_1 = -r_2$ و با لحاظ
معادله اول، $W_1 = W_2 = 1$ که در نتیجه معادلات اول،
دوم و چهارم ارضا می شوند. از معادله سوم داریم:



$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 1 \times f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \times f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

مربع سازی کوس

نقاط گوس و ضرایب وزن برای انتگرال گیری عددی مربع سازی گوس

m	r_i	W_i
1	0.0	2.0
2	0.577350269189626...	1.0
	-0.577350269189626...	1.0
3	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
	-0.774596669241483	0.555555555555556
4	0.339981043583856	0.652145154862526
	-0.339981043583856	0.652145154862526
	0.861136311590453	0.347854845137454
	-0.861136311590453	0.347854845137454

مثال ۱

$$I = \int_{-1}^1 (r^2 - 3r + 7) dr$$

انتگرال مقابل را با استفاده از روش گوس به صورت دقیق محاسبه کنید.

حل:

$$f(r) = (r^2 - 3r + 7)$$

$$W_i = 1 \quad i = 1, 2$$

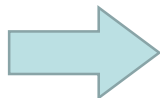
$$r_i = \pm 0.5773503$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (r^2 - 3r + 7) dr \\ &= (1)[(0.5773503)^2 - 3(0.5773503) + 7] \\ &+ (1)[(-0.5773503)^2 - 3(-0.5773503) + 7] \\ &= 14.666667 \end{aligned}$$

انتگرال دوگانه

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds \approx \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n [W_i f(r_i, s)] ds \approx \int_{-1}^1 g(s) ds = \sum_{j=1}^m W_j g(s_j)$$

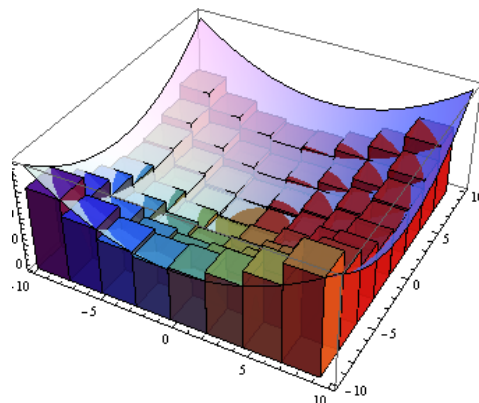


$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds \approx \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n W_j W_i f(r_i, s_j)$$

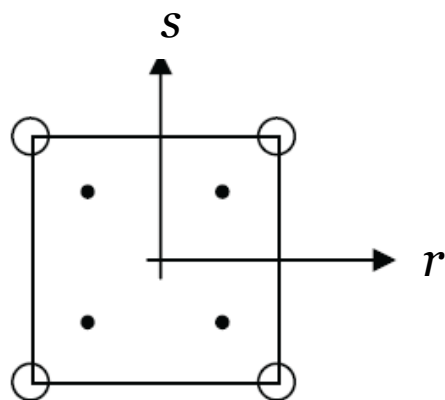
انتگرال دوگانه

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds \approx \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n W_j W_i f(r_i, s_j)$$

web.ma.utexas.edu/



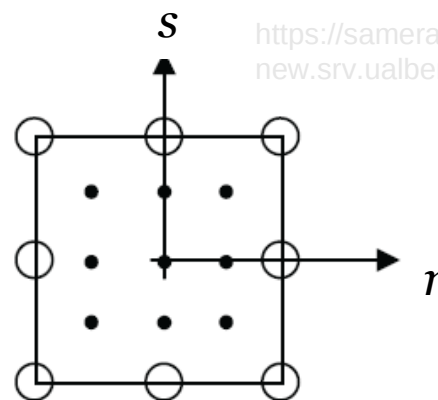
هشت نقطه در هر جهت



دو نقطه در هر جهت

○ Nodes

• Integration points



سه نقطه در هر جهت

موقعیت نقاط گوس در فضای دوبعدی

<https://sameradeeb-new.srv.ualberta.ca/>

مثال ۲

با استفاده از روش مربع سازی گوس مقدار دقیق انتگرال مقابل را محاسبه کنید.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (r^3 - 1)(s - 1)^2 dr ds$$

حل:

$$f(r, s) = (r^3 - 1)(s - 1)^2$$

$$I = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 W_j W_i f(r_i, s_j) =$$

r_1
↓

r_2
↓

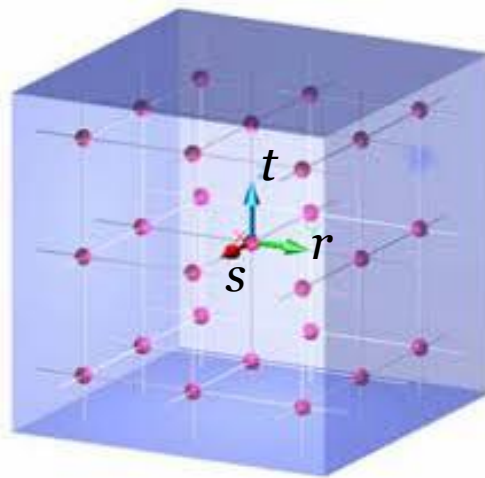
$s_1 \Rightarrow 1 \times 1 \times \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right)^2 + 1 \times 1 \times \left(\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right)^3 - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right)^2 +$

$s_2 \Rightarrow 1 \times 1 \times \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 - 1 \right) \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} - 1 \right)^2 + 1 \times 1 \times \left(\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right)^3 - 1 \right) \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} - 1 \right)^2$

$$= -5.3333333$$

انتگرال سه گانه

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s, t) dr ds dt \approx \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n W_k W_j W_i f(r_i, s_j, t_k)$$



مثال ۳

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r^2 (s^2 - 1)(t^4 - 2) dr ds dt$$

با استفاده از روش مربع سازی
گوس مقدار دقیق انتگرال
مقابل را به دست آورید.

$$I = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 W_k W_j W_i f(r_i, s_j, t_k)$$

حل:

$$\begin{array}{ll} r_1 = +0.5773503 & W_1 = 1 \\ r_2 = -0.5773503 & W_2 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} s_1 = +0.5773503 & W_1 = 1 \\ s_2 = -0.5773503 & W_2 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} t_1 = 0.0 & W_1 = 0.888889 \\ t_2 = 0.7745967 & W_2 = 0.5555556 \\ t_3 = -0.7745967 & W_3 = 0.5555556 \end{array}$$

مثال ۳

$$I = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 W_k W_j W_i f(r_i, s_j, t_k)$$

نقاط	r_i	s_j	t_k	W_i	W_j	W_k	$f(r_i, s_j, t_k)$	حاصل جمع تجمعی
۱	۰/۵۷۷۳۵	۰/۵۷۷۳۵	۰	۱	۱	۰/۸۸۸۸۸۸۹	۰/۳۹۵۰۶۲	۰/۳۹۵۰۶۲
۲	۰/۵۷۷۳۵	۰/۵۷۷۳۵	۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۰/۵۹۷۵۳۱
۳	۰/۵۷۷۳۵	۰/۵۷۷۳۵	-۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۰/۸
۴	۰/۵۷۷۳۵	-۰/۵۷۷۳۵	۰	۱	۱	۰/۸۸۸۸۸۸۹	۰/۳۹۵۰۶۲	۱/۱۹۵۰۶۲
۵	۰/۵۷۷۳۵	-۰/۵۷۷۳۵	۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۱/۳۹۷۵۳۱
۶	۰/۵۷۷۳۵	-۰/۵۷۷۳۵	-۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۱/۶
۷	-۰/۵۷۷۳۵	۰/۵۷۷۳۵	۰	۱	۱	۰/۸۸۸۸۸۸۹	۰/۳۹۵۰۶۲	۱/۹۹۵۰۶۲
۸	-۰/۵۷۷۳۵	۰/۵۷۷۳۵	۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۲/۱۹۷۵۳۱
۹	-۰/۵۷۷۳۵	۰/۵۷۷۳۵	-۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۲/۴
۱۰	-۰/۵۷۷۳۵	-۰/۵۷۷۳۵	۰	۱	۱	۰/۸۸۸۸۸۸۹	۰/۳۹۵۰۶۲	۲/۷۹۵۰۶۲
۱۱	-۰/۵۷۷۳۵	-۰/۵۷۷۳۵	۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۲/۹۹۷۵۳۱
۱۲	-۰/۵۷۷۳۵	-۰/۵۷۷۳۵	-۰/۷۷۴۵۹۷	۱	۱	۰/۵۵۵۵۵۵۶	۰/۲۰۲۴۶۹	۳/۲

مثال ۴

$$I = \int_{-1}^1 \frac{r^2 - 1}{(r + 3)^2} dr$$

انتگرال مقابل را با استفاده از روش انتگرال-گیری گوس و با بکار بردن یک، دو و سه نقطه انتگرالی محاسبه کنید.

یک نقطه انتگرالی:

$$W_1 = 2 \quad r_1 = 0$$

$$I \approx 2 \left(\frac{-1}{9} \right) = -0.222222$$

دو نقطه انتگرالی:

$$W_1 = W_2 = 1 \quad r_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad r_2 = -r_1$$

$$I \approx -0.16568$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{r^2 - 1}{(r + 3)^2} dr$$

مثال ۴

سه نقطه انتگرالی:

$r_1 = 0.0$	$W_1 = 0.888889$
$r_2 = 0.7745967$	$W_2 = 0.5555556$
$r_3 = -0.7745967$	$W_3 = 0.5555556$

$$I \approx -0.15923$$

$$I \approx -0.15891$$

چهار نقطه انتگرالی:

$$I = -0.158888$$

حل تحلیلی: